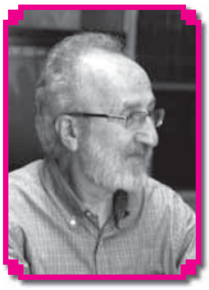
ساده‌ترین اثبات قضیهٔ فیثاغورس!



غلامرضا یاسی‌پور

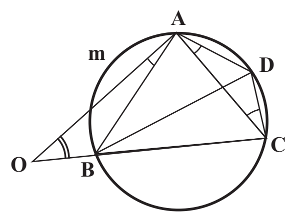
از قضیهٔ بطلمیوس تا قضیهٔ فیثاغورس

نخست قضیهٔ زیر را که به «قضیهٔ **بطلمیوس**» معروف است، اثبات می‌کنیم[۱]:

صورت قضیهٔ بطلمیوس: در هر چهارضلعی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضرب اضلاع روبه‌روی آن.

اثبات: اگر $ABCD$ چهارضلعی محاطی باشد، فرض می‌کنیم:

$AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ و $AC=x$ و $BD=y$



از A خط m را طوری رسم می‌کنیم که قرینهٔ ضلع AD نسبت به نیم‌ساز زاویهٔ BAC باشد و BC را امتداد می‌دهیم تا m را در O قطع کند و زاویهٔ OBA مساوی زاویهٔ ADC می‌باشد (چرا؟) دو مثلث AOB و ACD متشابه‌اند و داریم:

$$AO: AC=AB: AD=OB: CD \qquad (۱)$$

همچنین، دو مثلث OAC و BAD متشابه‌اند، زیرا: $\hat{OAC} = \hat{BAD}$ واضلاع این دو مثلث متناسب اند در نتیجه:

$$OC: BD=AC: AD \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$OB=ac: d$ و $OC=xy: d$

با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ $OC=OB+BC$ نتیجه می‌شود:

$xy=ac+bd$

نتیجه: اگر ABCD محاطی نباشد، داریم: $OC<OB+BC$ و در نتیجه: $xy<ac+bd$.

یعنی در هر چهارضلعی غیرمحاطی حاصل‌ضرب دو قطر از مجموع حاصل‌ضرب‌های اضلاع مقابل آن کمتر است. و در نتیجه معلوم می‌شود که هرگاه در یک چهارضلعی رابطهٔ $xy=ac+bd$ برقرار باشد، آن چهارضلعی محاطی است. (عکس قضیهٔ بطلمیوس) زیرا اگر محاطی نباشد، باید داشته باشیم: $xy<ac+bd$ که خلاف فرض است.

حال با توجه به قضیهٔ بطلمیوس درستی قضیهٔ فیثاغورس واضح است. رابطهٔ قضیهٔ بطلمیوس را در مستطیل به ابعاد b و c و قطر a که یک چهارضلعی محاطی است، بنویسید!

***پی‌نوشت**

۱. کتاب قضایا و مسائل هندسه، غلامرضا یاسی‌پور، ۱۳۴۸.

پرسش‌های پیکارجو!

مثلثی با اضلاع به طول‌های ۱۰ و ۸ و ۴ واحد را حول کوچک‌ترین ضلع آن دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه‌قدر است؟

الف) ۶۶π ب) ۷۷π ج) ۷۲π

د) $\frac{۱۰۱\pi}{۳}$ هـ) $\frac{۲۳۳\pi}{۴}$